

Das Laplace-Spektrum

Enstanden im Rahmen des Proseminars zur Linearen Algebra
bei Emanuele Delucchi an der Universität Bremen

Jan-Philipp Litza

01.04.2011

Stets sei $G = (V, E)$ ein einfacher, ungewichteter Graph.

Definition. 1. Die **Grad-Matrix** von G ist definiert als $D = D_G := \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$, wobei $d_i = \text{Grad}(i) \forall i \in V$.

2. Die **Laplace-Matrix** ist definiert als $L = L_G := D - A$ mit der Grad-Matrix D und der Adjazenzmatrix A .

Bemerkung. Die Laplace-Matrix lässt sich auch schreiben als $L = (l_{ij})$ mit

$$l_{ij} = \begin{cases} d_i & \text{falls } i = j \\ -1 & \text{falls } i \sim j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lemma. L ist positiv semi-definit.

Beweis. Wir wählen für jede Kante von G eine beliebige Richtung sowie eine beliebige Kantenreihenfolge. Sei $R := (r_{ie})$ mit

$$r_{ie} = \begin{cases} -1 & \text{falls } i \text{ ein Ursprungsknoten von } e \text{ ist} \\ 1 & \text{falls } i \text{ ein Zielknoten von } e \text{ ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

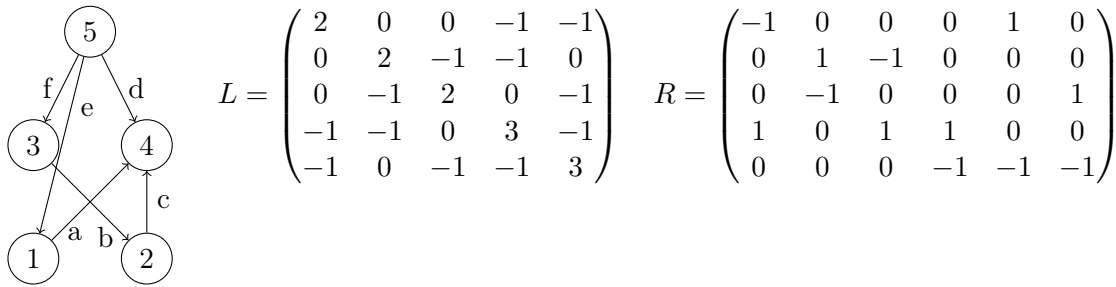
Sei ferner $L' = (l'_{ij}) = RR^T$. Dann ist

$$l'_{ij} = \sum_{k=1}^{|E|} r_{ik}r_{jk} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{|E|} r_{ik}^2 & \text{falls } i = j \\ -1 \cdot 1 & \text{falls } i \sim j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Da für jede zu i inzidente Kante k gilt, dass $r_{ik} \in \{1, -1\}$, also $r_{ik}^2 = 1$, ist $\sum_{k=1}^{|E|} r_{ik}^2$ gerade der Knotengrad von i und somit $L = L' = RR^T$.

Insgesamt gilt also $x^T L x = x^T R R^T x = (R^T x)^T (R^T x) = \|R^T x\|^2 \geq 0$. □

Beispiel. Sei G der folgende Graph, wobei die Richtungen der Kanten nicht zum eigentlich ungerichteten Graphen gehören, sondern beliebig gewählt sind, um den Beweis zu illustrieren, ebenso wie die Ordnung der Kanten. Dann sind seine zugehörigen Matrizen L und R :



$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung. Da L symmetrisch ist, sind alle Eigenwerte reell, und da L positiv semi-definit ist, sind alle Eigenwerte nicht-negativ. Wir betrachten also geordnete Eigenwerte

$$\nu_1(G) \geq \nu_2(G) \geq \dots \geq \nu_n(G) \geq 0$$

Tatsächlich ist $\nu_n(G) = 0$, wie simples Nachrechnen von $Lj = 0$ mit $j = (1, 1, \dots, 1)^T$ ergibt. Dies ist praktisch für die Betrachtung des Komplementärgraphen:

Proposition 7.1.1. Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $\bar{G} = (V, \bar{E})$ sein Komplementärgraph. Dann gilt: $\nu_n(\bar{G}) = 0$ und $\nu_i(\bar{G}) = n - \nu_{n-i}(G) \forall i = 1, \dots, n-1$.

Beweis. $\nu_n(\bar{G}) = 0$: Klar.

Sei $\{x_1, \dots, x_n\}$ eine Orthogonalbasis von \mathbb{R}^n sodass $L_G x_i = \nu_i x_i \forall i = 1, \dots, n$, und insb. $x_n = j$ (also eine aus Eigenvektoren bestehende Orthogonalbasis). Solch eine Basis existiert, weil L_G symmetrisch und positiv semi-definit ist. Wegen

$$L_{\bar{G}} = nE - L_G - J,$$

wobei $J = (1) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sowie der Orthogonalität der Vektoren, also insb.

$$0 = x_i^T x_n = x_i^T j = \sum_{k=1}^n x_{i,k}$$

gilt dann

$$L_{\bar{G}} x_i = (nE - L_G - J)x_i = n \cdot x_i - L_G x_i - \mathbf{0} = (n - \nu_i(G))x_i \quad \square$$

Satz 7.1.2. Die Vielfachheit von 0 als Eigenwert von L_G ist gleich der Anzahl der Zusammenhangskomponenten von G .

(Beweis folgt später)

Lemma (Rayleigh-Prinzip). Für die Eigenwerte $\nu_1(G) \geq \nu_2(G) \geq \dots \geq \nu_n(G) = 0$ der Laplace-Matrix L_G gilt:

$$\nu_{n-1}(G) = \min_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x \perp j} R_{L_G}(x)$$

wobei $R_{L_G}(x)$ der Rayleigh-Quotient ist.

Beweis. ¹ Sei $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine orthogonale Matrix sodass $U^\top L_G U = \Lambda = \text{diag}(\nu_1(G), \dots, \nu_n(G))$ Diagonalmatrix von L_G ist. Ein solches U existiert, da L_G symmetrisch und reell ist. Ferner sei $y = U^\top x$. Dann gilt wegen der Orthogonalität von U , dass $\|x\| = \|y\|$ und außerdem:

$$x^\top L_G x = x^\top U \Lambda U^\top x = y^\top \Lambda y = \sum_{k=1}^n \nu_k(G) |y_k|^2$$

Für den Rayleigh-Quotienten bedeutet dies, dass

$$R_{L_G}(x) = \frac{x^\top L_G x}{\|x\|^2} = \frac{\sum_{k=1}^n \nu_k(G) |y_k|^2}{\|y\|^2} = \sum_{k=1}^n \nu_k(G) \frac{|y_k|^2}{\|y\|^2}$$

Nun kann $R_{L_G}(x)$ abgeschätzt werden:

$$R_{L_G}(x) = \sum_{k=1}^n \nu_k(G) \frac{|y_k|^2}{\|y\|^2} \geq \frac{\nu_n(G)}{\|y\|^2} \sum_{k=1}^n |y_k|^2 = \nu_n(G)$$

$$R_{L_G}(x) = \sum_{k=1}^n \nu_k(G) \frac{|y_k|^2}{\|y\|^2} \leq \frac{\nu_1(G)}{\|y\|^2} \sum_{k=1}^n |y_k|^2 = \nu_1(G)$$

Insgesamt also $\nu_1(G) \geq R_{L_G}(x) \geq \nu_n(G)$. Da für einen Eigenvektor $L_G x_i = \nu_i(G) x_i$ für den Rayleigh-Quotienten gilt, dass $R_{L_G}(x_i) = \nu_i(G)$, folgt nun

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} R_{L_G}(x) = \nu_n(G).$$

Indem man mit $x \perp j$ sicherstellt, dass x Eigenvektor zu einem „anderen“ Eigenwert als $\nu_n(G)$ ist, folgt die Behauptung. \square

Beweis des Satzes 7.1.2. Durch Einsetzen von

$$x^\top L_G x = x^\top R R^\top x = \|R^\top x\|^2 = \sum_{\{u,v\} \in E(G)} (x_u - x_v)^2$$

in das Lemma erhält man

$$\nu_{n-1}(G) = \min_{x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}, x \perp j} \sum_{\{u,v\} \in E(G)} \frac{(x_u - x_v)^2}{\|x\|^2}$$

Da alle Summanden immer positiv sind und das Minimum tatsächlich angenommen wird, ist $\nu_{n-1}(G) = 0$ genau dann, wenn alle Summanden 0 sind, also $x_u = x_v \forall \{u, v\} \in E(G)$. Dies wiederum ist genau dann der Fall, wenn alle x_i einer Zusammenhangskomponente gleich sind. Solche zu j orthogonalen $x \in \mathbb{R}^n$ existieren genau dann, wenn G mehr als eine Zusammenhangskomponente hat.

Durch wiederholtes Anwenden dieses Prinzips folgt die Aussage. \square

¹ Bei Kenntnis des Rayleigh-Prinzips ist diese Aussage trivial. Dennoch hier ein Beweis ohne das Prinzip bzw. ein teilweiser Beweis des Prinzips selbst.

Bemerkung. Durch die Vielfachheit von 0 bestimmt das Spektrum von L_G also die Anzahl der Zusammenhangskomponenten eines Graphen – anders als die Adjazenzmatrix.

Auch die Anzahl der Kanten m wird durch das Spektrum bestimmt, da

$$2m = \sum_{i=1}^n d_i = \operatorname{tr}(L) = \sum_{i=1}^{n-1} \nu_i(G) \quad (*)$$

Allgemeiner gilt:

Satz 7.1.3. Für die Laplace-Eigenwerte $\nu_1(G) \geq \nu_2(G) \geq \dots \geq \nu_n(G)$ eines Graphen G mit den Knotengraden $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ gilt:

$$\sum_{i=1}^k \nu_i(G) \geq \sum_{i=1}^k d_i \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $k = n$.

Beweis. Folgt aus Satz 1.3.2 im Buch bzw. 2.6 im Seminar:

Sei M eine positiv semi-definite Matrix mit Eigenwerten $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$.

[...] Insbesondere ist $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r$ nach unten beschränkt durch die Summe der r größten Diagonaleinträge von M . \square

Bemerkung 7.1.4. 1. Sei

$$\bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \nu_k(G)$$

der mittlere Knotengrad. Dann folgt aus (*):

$$\frac{n-1}{n} \nu_{n-1}(G) \leq \bar{d} \leq \frac{n-1}{n} \nu_1(G)$$

Dies kann noch verfeinert werden zu

$$\nu_{n-1}(G) \leq \frac{n}{n-1} \delta \quad \text{und} \quad \nu_1(G) \geq \frac{n}{n-1} \Delta$$

wobei δ und Δ die minimalen bzw. maximalen Knotengrade sind. Aus der letzten Ungleichung folgt ferner $\nu_1 \geq \Delta + 1$ falls G kein Nullgraph ist. Gleichheit gilt hier genau dann, wenn $\Delta = n - 1$.

Beweis. Aus dem Lemma oben (Rayleigh-Prinzip) ist bekannt, dass

$$\nu_{n-1}(G) = \min_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x \perp j} R_{L_G}(x)$$

Dies lässt sich umformen (s. Kapitel 7.3 im Quell-Buch) zu

$$\nu_{n-1}(G) = 2n \min_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \langle j \rangle} \frac{\sum_{\{u,v\} \in E(G)} (x_u - x_v)^2}{\sum_{u \in V(G)} \sum_{v \in V(G)} (x_u - x_v)^2}$$

Sei nun k der Knoten mit dem geringsten Knotengrad, also $d_k = \delta$. Setzt man dann $y = j - e_k$, so erfüllt dieser Vektor die Bedingung $y \in \mathbb{R}^n \setminus \langle j \rangle$, also gilt

$$\begin{aligned}\nu_{n-1}(G) &\leq 2n \frac{\sum_{\{u,v\} \in E(G)} (y_u - y_v)^2}{\sum_{u \in V(G)} \sum_{v \in V(G)} (y_u - y_v)^2} \\ &= \frac{2n\delta}{1 \cdot (n-1) + (n-1) \cdot 1} \\ &= \frac{n}{n-1} \delta\end{aligned}$$

Ersetzt man das Minimum durch ein Maximum, so gilt die Formel für den größten Eigenwert $\nu_1(G)$.

$$\nu_1(G) = 2n \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \langle j \rangle} \frac{\sum_{\{u,v\} \in E(G)} (x_u - x_v)^2}{\sum_{u \in V(G)} \sum_{v \in V(G)} (x_u - x_v)^2}$$

Sei also analog l der ranghöchste Knoten (also $d_l = \Delta$) und $y = j - e_l$, dann gilt

$$\begin{aligned}\nu_1(G) &\geq \frac{2n\Delta}{(n-1) \cdot 1 + 1 \cdot (n-1)} \\ &= \frac{n}{n-1} \Delta\end{aligned} \quad \square$$

2. Satz 7.1.3 kann ebenfalls verfeinert werden: Sei G ein nicht-trivialer, zusammenhängender Graph mit Knotengraden $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ und sei t_k die Anzahl der Zusammenhangskomponenten des durch $1, 2, \dots, k$ (also den k Knoten mit den höchsten Rängen) induzierten Untergraphen. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^k \nu_i(G) \geq t_k + \sum_{i=1}^k d_i \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

Definition. Das **Laplace-Spektrum** eines Graphen G besteht aus den Eigenwerten $\nu_1(G), \dots, \nu_r(G)$ von L_G sowie ihren Vielfachheiten k_1, \dots, k_r . Schreibweise:

$$\left(\nu_1(G)^{k_1}, \dots, \nu_r(G)^{k_r} \right)$$

Definition. Zwei Graphen heißen **L-kospektral** oder **L-isospektral**, falls sie das selbe Laplace-Spektrum haben.

Bemerkung. L-kospekturale Graphen haben zumindest die selbe Anzahl Knoten, Kanten und Zusammenhangskomponenten.

Beispiel. Abbildung 1 zeigt das kleinste Paar von L-kospektralen Graphen. Wir betrachten die zugehörigen Laplace-Matrizen und -Spektren:

$$L_{G_1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad L_{G_2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

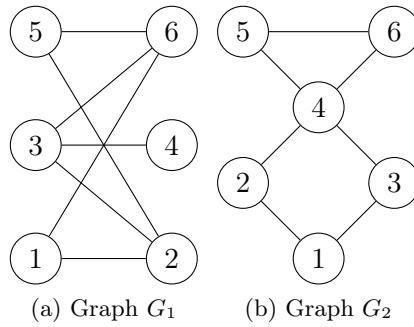


Abbildung 1: L-kospektrale Graphen

$$\chi_{L_{G_1}}(\lambda) = \chi_{L_{G_2}}(\lambda) = \lambda^6 - 14\lambda^5 + 73\lambda^4 - 176\lambda^3 + 192\lambda^2 - 72\lambda$$

Da bereits die charakteristischen Polynome gleich sind ist klar, dass auch das Spektrum gleich sein muss: Beide Graphen haben das Laplace-Spektrum

$$\left((3 + \sqrt{5})^1, 3^2, 2^1, (3 - \sqrt{5})^1, 0^1 \right)$$

Quellen

- Cvetkovich, Rowlinson and Simic: „An introduction to the theory of spectra“ (§7.1 und §1.3)
- Costin: Vorlesungsnotizen zur Veranstaltung „Mathematical Principles in Science II“ (<http://www.math.osu.edu/~rcostin/602/>, Lecture 13)