

# Das Newton-Polygon

im Rahmen des Seminars „Verzweigungstheorie und ihre Anwendungen“

Jan-Philipp Litza

Wintersemester 2013/14

Unter anderem um nicht-lineare Gleichungssysteme, auf die der Satz über implizite Funktionen nicht anwendbar ist, z. B. mit Hilfe der Lyapunov-Schmidt-Reduktion zu untersuchen, ist es notwendig Nullstellenkurven algebraischer Gleichungen der Art

$$\Phi(s, \lambda) = \sum_{j,k=0}^{\infty} c_{jk} \lambda^j s^k, \quad c_{jk} \in \mathbb{R}, c_{00} = 0$$

zu finden, bzw. die zugehörige algebraische Funktion zu extrahieren. Hierfür eignet sich das Newton-Polygon, dessen Verfahren wir zunächst an einem einfachen Beispiel illustrieren wollen:

**Beispiel 1.** (Während sich die Notation dieser Arbeit an [Kie04, Kapitel I.15] orientiert, folgt der inhaltliche Aufbau eher [CH82, Kapitel 2.8.]. So auch dieses Beispiel, welches [CH82, (8.6)] entspricht.)

Sei

$$\Phi(s, \lambda) = \lambda^3 + c_{21} \lambda^2 s + c_{13} \lambda s^3 + c_{04} s^4 = 0, \quad c_{21}, c_{13}, c_{04} \neq 0. \quad (1)$$

Wollen wir die Nullstellen in einer Umgebung der Nullstelle  $(0, 0)$  als  $(s, \lambda(s))$  darstellen, muss natürlich  $\lambda(0) = 0$  gelten. Nehmen wir also an, dass  $\lambda(s) = s^\alpha v(s)$  mit  $\alpha \in \mathbb{R}_+$  und einer stetigen Funktion  $v$  mit  $v(0) \neq 0$ . Einsetzen in (1) ergibt

$$s^{3\alpha} v^3 + c_{21} s^{1+2\alpha} v^2 + c_{13} s^{3+\alpha} v + c_{04} s^4 = 0.$$

Da  $v(0) \neq 0$  und wir Nullstellen in einer Umgebung von  $s = 0$  suchen, müssen mindestens zwei Exponenten von  $s$  gleich sein, damit die Koeffizienten sich zu 0 addieren können. Außerdem sollten diese gleichen Exponenten minimal sein, damit sie sich aus der Gleichung rausteilen lassen. In unserem Beispiel würde also  $\alpha = 1$  die Exponenten  $3 = 3\alpha = 1 + 2\alpha$  und  $4 = 3 + \alpha = 4$  ergeben. Teilen durch  $s^3$  ergibt die Gleichung

$$v^3 + c_{21} v^2 + c_{13} s v + c_{04} s = 0.$$

Für  $s = 0$  hat diese Gleichung die Lösung  $v = -c_{21}$ , und der Satz über implizite Funktionen liefert uns eine stetige Lösung  $v(s)$  nahe  $s = 0$  mit  $v(0) = -c_{21}$ . Somit erhalten wir die Lösungskurve  $\lambda(s) = s v(s)$  für unsere ursprüngliche Gleichung (1).

Unsere Wahl  $\alpha = 1$  war nicht die einzig mögliche: Auch  $\alpha = \frac{3}{2}$  liefert uns gleiche, minimale Exponenten, und zwar  $4 = 1 + 2\alpha = 4$  (und  $\frac{9}{2} = 3\alpha = 3 + \alpha$ ). Teilen durch  $s^4$  ergibt die Gleichung

$$s^{\frac{1}{2}} v^3 + c_{21} v^2 + c_{13} s^{\frac{1}{2}} + c_{04} = 0$$

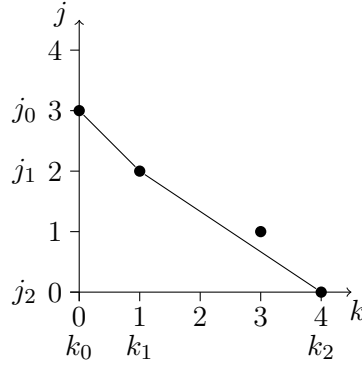


Abbildung 1: Newton-Polygon des Polynoms (1) auf der vorherigen Seite.

und für  $s = 0$  die Lösung  $v = \pm\sqrt{-c_{04}/c_{21}}$ . Wieder mit dem Satz über implizite Funktionen lassen sich dazu zwei Lösungskurven  $v_1(s^{\frac{1}{2}}), v_2(s^{\frac{1}{2}})$  finden, sodass unsere ursprüngliche Gleichung (1) auf der vorherigen Seite die Lösungen  $\lambda_1(s) = s^{\frac{3}{2}}v_1(s^{\frac{1}{2}})$  und  $\lambda_2(s) = s^{\frac{3}{2}}v_2(s^{\frac{1}{2}})$  hat.

Um dieses Verfahren zu systematisieren konstruiert man das sogenannte Newton-Polygon der Potenzreihe, was die konvexe Hülle der Menge

$$N := \{(k, j) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid c_{jk} \neq 0\}$$

ist.

In Abbildung 1 ist das Newton-Polygon des Polynoms (1) auf der vorherigen Seite abgebildet, und man sieht dass es beide Achsen berührt. Natürlich lässt sich dies immer erreichen: Falls für alle  $j \in \{1, \dots, j_n\}$  und alle  $k \in \mathbb{N}_0$  für die Koeffizienten  $c_{jk} = 0$  gilt, dann ist  $j_n$  der kleinste Exponent von  $s$  und somit lässt sich  $\Phi(s, \lambda)$  problemlos durch  $s^{j_n}$  teilen:

$$\Phi(s, \lambda) = s^{j_n} \Phi'(s, \lambda)$$

wobei  $\Phi'(s, \lambda)$  wieder eine algebraische Funktion ist, deren Newton-Polygon jetzt jedoch die  $j$ -Achse berührt. Analog lässt sich falls für alle  $j \in \mathbb{N}_0$  und  $k \in \{1, \dots, k_0\}$  gilt dass  $c_{jk} = 0$  der Term  $\lambda^{k_0}$  herausteilen, sodass wir o.B.d.A. nur algebraische Funktionen betrachten, deren niedrigste Exponenten von  $s$  und  $\lambda$  jeweils 0 sind und deren Newton-Polygon somit beide Achsen berührt.

Wir sind nun interessiert an dem Kantenzug des Newton-Polygons, der die Punkte  $(0, j_0)$  und  $(k_n, 0)$  verbindet, wobei  $j_0 = \min\{j \in \mathbb{N}_0 \mid (0, j) \in N\}$  und  $k_n = \min\{k \in \mathbb{N}_0 \mid (k, 0) \in N\}$ . Die Punkte auf diesem Kantenzug bezeichnen wir mit  $(k_i, j_i), k_i < k_{i+1}, j_i > j_{i+1}$ . Verkürzend schreiben wir auch  $c_i := c_{j_i k_i}$ .

Es handelt sich tatsächlich um endlich viele Kanten, da die Eckpunkte auf dem diskreten Gitter  $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$  liegen und die Endpunkte des Kantenzuges endliche Koordinaten haben.

Damit lässt sich  $\Phi(s, \lambda)$  umschreiben zu

$$\Phi(s, \lambda) = \sum_{i=0}^n c_i \lambda^{j_i} s^{k_i} + R(s, \lambda)$$

wobei  $R(s, \lambda)$  die verbleibenden Terme enthält, die sogenannten „Higher Order Terms“.

Sei nun  $-1/\alpha = -\alpha_2/\alpha_1 \in \mathbb{Q}$  die Steigung einer Kante des Newton-Polygons, also

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{j_{i-1} - j_i}{k_i - k_{i-1}} \Leftrightarrow \sigma := \alpha j_i + k_i = \alpha j_{i-1} + k_{i-1} \leq \alpha j + k \quad \forall (k, j) \in N \quad (2)$$

wobei sich die Ungleichung daraus ergibt, dass das Newton-Polygon die konvexe Hülle aller Punkte in  $N$  ist. Angenommen es gilt für genau  $r + 1$  Punkte  $\{(k_\ell, j_\ell), \dots, (k_{\ell+r}, j_{\ell+r})\}$  Gleichheit, also dass diese Punkte auf der zur Geraden erweiterten Kante liegen. Wieder wegen der Konvexität ist dies genau für aufeinanderfolgende Punkte der Fall, weshalb die Notation gerechtfertigt ist. Dann können wir wie in unserem früheren Beispiel den Ansatz

$$\lambda(s) = s^\alpha v(s) \quad (3)$$

wählen und erhalten die „skalierte Gleichung“

$$\begin{aligned} \Phi(s, s^\alpha v) &= \sum_{i=\ell}^{\ell+r} c_i (s^\alpha v)^{j_i} s^{k_i} + R_\alpha(s, s^\alpha v) \\ &= \sum_{i=\ell}^{\ell+r} c_i \overbrace{s^{\alpha j_i + k_i}}{=\sigma} v^{j_i} + R_\alpha(s, s^\alpha v) \\ &= s^\sigma \left( \underbrace{\sum_{i=\ell}^{\ell+r} c_i v^{j_i}}_{=: P_\alpha(v)} + R'_\alpha(t, v) \right) \end{aligned}$$

wobei

$$R_\alpha(s, s^\alpha v(s)) = \sum c_{jk} s^{\alpha j + k} v^j$$

gemäß Ungleichung (2) nur Exponenten größer als  $\sigma$  hat und daher problemlos durch  $s^\sigma$  geteilt werden kann:

$$\begin{aligned} &= s^\sigma \left( \sum c_{jk} v^j s^{\alpha j + k - \sigma} \right) \\ &= s^\sigma \underbrace{\left( \sum c_{jk} v^j \left( s^{1/\alpha_2} \right)^{\alpha_1 j + \alpha_2 k - \alpha_2 \sigma} \right)}_{=: R'_\alpha(t, v) \text{ mit } t = s^{1/\alpha_2}} \end{aligned}$$

Hierbei ist  $R'_\alpha$  zwar keine Potenzreihe in  $s$  mehr, da  $\alpha \in \mathbb{Q}$ , wohl aber eine Potenzreihe in  $t = s^{1/\alpha_2}$  mit streng positiven Exponenten, insbesondere also  $R'_\alpha(0, v) = 0$ . Eine solche konvergente Potenzreihe in einer rationalen Potenz von  $s$  nennt man Puiseuxreihe.

Sei nun  $v_0$  eine echte Nullstelle von  $P_\alpha$ , dann ist auch  $P_\alpha(v_0) + R'_\alpha(0, v_0) = 0$  und falls die Vielfachheit von  $v_0$  gleich 1 ist, erhält man durch den Satz über implizite Funktionen eine Funktion  $v(t)$  mit  $v(0) = v_0$  die analytisch in  $t$  ist, also der Form

$$v_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i t^i.$$

sodass  $\{(t, v(t)) \mid 0 \leq t \leq \delta_1\}$  Lösungskurve ist von

$$P_\alpha(v) + R'_\alpha(t, v) = 0.$$

Durch Einsetzen von  $v(t)$  und  $t = s^{1/\alpha_2}$  in (3) auf der vorherigen Seite erhält man dann die Lösungskurve

$$\{(s, s^\alpha (v_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i s^{i/\alpha_2})) \mid 0 \leq s \leq \delta_2\}$$

von  $\Phi(s, \lambda)$  durch  $(0, 0)$ , insbesondere also  $\lambda(s) = v_0 s^\alpha + \mathcal{O}(s^{(\alpha_1+1)/\alpha_2})$ . Dies rechtfertigt, die „Higher Order Terms“ zu vernachlässigen, da  $\lambda$  bei  $s = 0$  maßgeblich von  $v_0 s^\alpha$  abhängt.

Falls die Vielfachheit der Nullstelle  $v_0$  größer als 1 ist, muss man die gesamte Methode für  $\Phi(s, s^\alpha(\bar{v} + v_0))$  von vorne beginnen. Diese Wiederholungen terminieren irgendwann, da bei jeder Iteration das Newton-Polygon kleiner wird.

*Bemerkung.* Dass dieses Verfahren alle Lösungen findet, folgt aus dem [CH82, Corollary 6.6] des Vorbereitungssatzes von Weierstraß. Es besagt, dass  $\Phi$  in einer genügend kleinen Umgebung um 0 genau  $j_0$  Lösungskurven hat, da  $\Phi(s, 0) = s^{j_0} g(s)$  mit  $s$  analytisch.

Da  $P_\alpha(v) = \sum_{i=0}^{\ell+r} c_i v^{j_i}$  ein Polynom des Grades  $j_\ell$  ist (da  $j_i > j_{i+1}$  und  $\ell$  der kleinste Index ist), hat es auch genau  $j_\ell$  Nullstellen. Wir betrachten hier nur echte, von Null verschiedene Nullstellen, da diese nach [Kie04, Remark I.15.1] zu anderen Abschnitten des Newton-Polygons gehören. Daher fällt die  $j_{\ell+r}$ -fache Nullstelle 0 weg, und es bleiben  $j_\ell - j_{\ell+r}$  Nullstellen übrig, zu denen jeweils eine Lösungskurve konstruiert wird. Die Vielfachheit der Nullstellen kann bei dieser Betrachtung ignoriert werden, da die  $j_\ell - j_{\ell+r}$  Nullstellen auch mehrfach vorkommen können.

Da dieses Verfahren für jede Steigung des Newton-Polygons anzuwenden ist, werden dabei insgesamt  $j_0$  Lösungskurven gefunden, und somit alle möglichen Lösungskurven.

**Beispiel 2.** Um noch einmal ein Problem zu betrachten, das eine Iteration des Verfahrens benötigt, betrachten wir das Beispiel [CH82, (8.11)]: Sei

$$\Phi(s, \lambda) = \lambda^5 + 2s\lambda^4 - s\lambda^2 - 2s^2\lambda - s^3 - s^4 = 0 \quad (4)$$

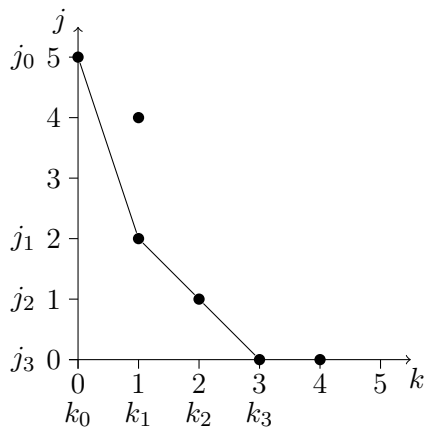
Aus dem Newton-Polygon in Abbildung 2(a) auf der nächsten Seite kann man ablesen, dass die erste Kante eine Steigung von  $-3$  besitzt, also  $\alpha = 1/3$ . Somit wählen wir den Ansatz  $\lambda = s^{1/3}v$  und erhalten die skalierte Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= s^{5/3}v^5 + 2s^{7/3}v^4 - s^{5/3}v^2 - 2s^{7/3}v - s^3 - s^4 \\ &= s^{5/3} \left( v^5 + 2s^{2/3}v^4 - v^2 - 2s^{2/3}v - s^{4/3} - s^{7/3} \right) \\ &= v^5 + 2s^{2/3}v^4 - v^2 - 2s^{2/3}v - s^{4/3} - s^{7/3} \end{aligned}$$

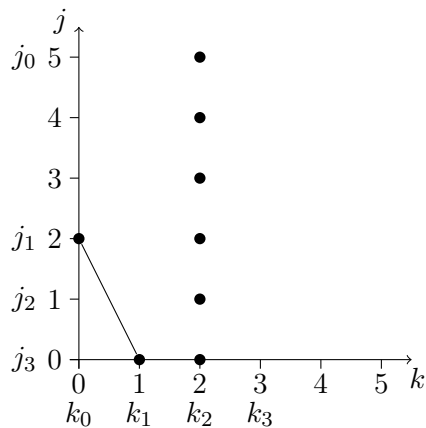
Diese Gleichung hat für  $s = 0$  die selbe Lösung wie  $v^3 = 1$ , im Komplexen also drei Nullstellen erster Ordnung, und mit dem Satz über implizite Funktionen gibt es dann drei Nullstellenkurven  $v_j(s^{1/3})$  nahe  $s = 0$  mit  $v_j(0)^3 = 1$ . Diese Kurven lassen sich dann heben zu Nullstellenkurven von  $\Phi$  der Form  $\lambda_j(s) = s^{1/3}v_j(s^{1/3})$ .

Wählen wir nun passend zur zweiten Steigung  $-1$  des Newton-Polygons  $\alpha = 1$ , so erhalten wir mit dem Ansatz  $\lambda = sv$  die skalierte Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= s^5v^5 + 2s^5v^4 - s^3v^2 - 2s^3v - s^3 - s^4 \\ &= s^3 (s^2v^5 + 2s^2v^4 - v^2 - 2v - 1 - s^4) \\ &= s^2v^5 + 2s^2v^4 - v^2 - 2v - 1 - s^4 \end{aligned}$$



(a) Newton-Polygon des Polynoms (4).



(b) Newton-Polygon des Polynoms (5).

Für  $s = 0$  wird diese Gleichung gelöst durch  $v = -1$ , und zwar mit Vielfachheit 2, da

$$-v^2 - 2v - 1 = -(v + 1)^2.$$

Also müssen wir nun  $v = \bar{v} - 1$  substituieren und erhalten ein neues System

$$0 = \bar{v}^5 s^2 - 3\bar{v}^4 s^2 + 2\bar{v}^3 s^2 + 2\bar{v}^2 s^2 - \bar{v}^2 - 3\bar{v} s^2 + s^2 - s \quad (5)$$

dessen Newton-Polygon in Abbildung 2(b) dargestellt ist. Die einzige Steigung ist  $-2$ , also wählen wir  $\alpha = 1/2$  und setzen  $\bar{v} = s^{1/2} w$ . Dies ergibt die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= s^{3/2} w^5 - 3s^4 w^4 + 2s^{7/2} w^3 + 2s^3 w^2 - s w^2 - 3s^{3/2} w + s^2 - s \\ &= s \left( s^{1/2} w^5 - 3s^3 w^4 + 2s^{5/2} w^3 + 2s^2 w^2 - w^2 - 3s^{1/2} w + s - 1 \right) \end{aligned}$$

Für  $s = 0$  bleibt nur  $0 = -w^2 - 1$  stehen, sodass

$$\begin{aligned} w(0) &= \pm i, \\ \bar{v}(0) &= \pm s^{1/2} i, \\ v(0) &= \pm s^{1/2} i - 1, \\ \lambda(0) &= \pm s^{3/2} i - s, \end{aligned}$$

jeweils mit einer analytische Funktion.

## Literatur

- [CH82] Shui-Nee Chow and Jack K. Hale. *Methods of Bifurcation Theory*. Number 251 in Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Springer, 1982.
- [Kie04] Hansjörg Kielhöfer. *Bifurcation theory. An introduction with applications to PDEs*. Number 156 in Applied Mathematical Sciences. Springer, 2004.